ＩＢ　解析特論（$Fourier$ 変換）　講義報告[6]

２００８年3月２９日（土）　１４：００－１６：００

前回に引き続き、L^2- 近似の基本手段である熱核と呼ばれる関数の性質を調べ、その性質を用いて「熱核の近似定理」を証明した。この近似定理により $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ が $L^2(\mathbb{R})$ で稠密になることを導き、$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上の $Fourier$ 変換 $\mathfrak{F}:\mathcal{S}(\mathbb{R})\to\mathcal{S}(\mathbb{R})$ を $L^2(\mathbb{R})$ へ拡張した。

3　$L^2(\mathbb{R})$ 上の $Fourier$ 変換

定義 3.1 (熱核). $t>0$ に対して、

$$W_t(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right)$$

なる型の関数を**熱核**という。

補題 3.1.

1. $W_t(x)\geq 0 \quad for\ \forall t\in\mathbb{R}$
2. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} W_t(x)|dx|=1$
3. $\displaystyle\forall\delta>0,\quad \int_{|x|\geq\delta} W_t(x)|dx|\to 0 \quad (t\downarrow 0)$

練習問題 3.1.

1. $f\in L^2(\mathbb{R})$ ならば、$W_t*f\in C^\infty(\mathbb{R})$ で、
$$\partial_x^k(W_t*f)=(\partial_x^k W_t)*f$$
2. $f\in L^2(\mathbb{R})$ でかつ、$supp\ f$ がコンパクトならば、$W_t*f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$
3. $\|W_t*f\|_2\leq\|f\|_2$
4. $\|f-W_t*f\|_2\to 0 \quad (t\downarrow 0)$

補題 3.2 (熱核の近似定理). f が $\mathbb{R}$ 上で有界、かつ一様連続ならば、

$$\|f-W_t*f\|_{\mathbb{R}}\to 0 \quad (t\downarrow 0)$$

ただし、

$$\|f-W_t*f\|_{\mathbb{R}}=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)-W_t*f(x)|$$

定理 3.1. 任意の $f\in L^2(\mathbb{R})$ に対して、$f_n=1_{[-n,n]}f$ とする。いま、$\varphi_n=W_{\frac{1}{n}}*f_n \quad (n\in\mathbb{N}$ とするとき、$\|\varphi_n-f\|_2\to 0 \quad (n\to\infty)$ が成立する。すなわち、$\overline{\mathcal{S}(\mathbb{R})}=L^2(\mathbb{R})$

[6]数学工房　http://www.sugakukobo.com/

この定理により、$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ は $L^2(\mathbb{R})$ で**稠密**になることがわかった。この結果から $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上の $Fourier$ 変換 $\mathfrak{F}:\mathcal{S}(\mathbb{R})\to\mathcal{S}(\mathbb{R})$ は $L^2(\mathbb{R})$ へ拡張される。すなわち、稠密性から任意の $f\in L^2(\mathbb{R})$ に対して、f に L^2- 収束する $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上の点列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{S}(\mathbb{R})$ が存在する。$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上の $Fourier$ 変換の等長性により点列 $\{\mathfrak{F}(f_n)\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{S}(\mathbb{R})$ は $L^2(\mathbb{R})$ 上の $Cauchy$ 列になるから、$L^2(\mathbb{R})$ の完備性により点列 $\{\mathfrak{F}(f_n)\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{S}(\mathbb{R})$ は $L^2(\mathbb{R})$ に収束点をもつ。このとき、$f\in L^2(\mathbb{R})$ の $Fourier$ 変換を

$$\mathfrak{F}(f)=\lim_{n\to\infty}\mathfrak{F}(f_n)\in L^2(\mathbb{R})$$

と定義する。($L^2(\mathbb{R})$ 上の $Fourier$ 変換を同じ記号 $\mathfrak{F}$ で表示することにする。)

練習問題 3.2.

1. $L^2(\mathbb{R})$ 上の $Fourier$ 変換 $\mathfrak{F}$ は線形で、点列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{S}(\mathbb{R})$ の取り方によらないことを示せ。
2. $\|\mathfrak{F}(f)\|_2=\|f\|_2 \quad \forall f\in L^2(\mathbb{R})$
3. $\langle\mathfrak{F}(f),\mathfrak{F}(g)\rangle_2=\langle f,g\rangle_2 \quad \forall f,\forall g\in L^2(\mathbb{R})$

記録　J.S